

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

La calculatrice est autorisée

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Chimie de l'airbag

L'airbag (ou coussin gonflable) est un accessoire de sécurité passive développé pour l'automobile à la fin des années 1980 et qui équipe maintenant tous les véhicules. Depuis la fin des années 1980, l'airbag n'a cessé d'évoluer afin d'augmenter la protection des personnes dans les voitures. Lors d'un impact justifiant le déclenchement du système de sécurité, des capteurs détectent la décélération du véhicule : un signal électrique est envoyé à un détonateur, dans le générateur de gaz de l'airbag. Une décomposition très rapide (réaction de nature explosive) de l'azoture de sodium NaN_3 solide provoque la libération en quelques millisecondes d'une quantité de gaz suffisante pour déployer les 35 L du sac en polyamide du coussin gonflable. Le système se dégonfle spontanément après quelques instants afin de libérer le passager.

La formation du gaz supposé parfait, suit ces trois étapes :

- Réaction 1 : $2 \text{NaN}_3 (s) = 2 \text{Na} (s) + 3 \text{N}_2 (g)$: réaction de génération du gaz, $K_1 = 10^{23}$;
- Réaction 2 : $10 \text{Na} (s) + 2 \text{KNO}_3 (s) = \text{K}_2\text{O} (s) + 5 \text{Na}_2\text{O} (s) + \text{N}_2 (g)$: réaction de sécurité.

1) Justifier qualitativement que la réaction 1 puisse être considérée comme quantitative.

2) Dans le système d'airbag d'une voiture de série, 65 g d'azoture de sodium NaN_3 sont mis en jeu. Calculer la quantité de matière de diazote formé si l'on n'envisage que la réaction 1. On donne $M_{\text{Na}} = 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{N}} = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3) On suppose la température $T = 300 \text{ K}$ constante et on rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. L'airbag est-il gonflé ?

4) En considérant que la totalité du sodium Na formé lors de la réaction 1 est transformée dans la réaction 2, déterminer la quantité de matière supplémentaire de diazote dans le ballon.

----- Fin de la partie I -----

II - Correction de la distorsion harmonique

Un signal électronique peut être déformé lors de la traversée de divers systèmes électroniques. C'est par exemple le cas de l'effet Larsen. Cet effet se produit lorsqu'un microphone et un haut-parleur sont placés à proximité l'un de l'autre. Le son émis par le haut-parleur est capté par le microphone qui le retransmet au haut-parleur et ainsi de suite. Cette boucle produit un signal qui augmente progressivement en intensité jusqu'à atteindre les limites du matériel utilisé.

Nous allons dans cet exercice étudier une version simplifiée de cette distorsion du signal et de filtres permettant de la corriger.

Soit un signal harmonique $u(t) = A \cos(\omega_1 t)$ de pulsation ω_1 et d'amplitude $A = 1 \text{ V}$. On considère que l'effet Larsen a pour effet de saturer le signal reçu à la valeur maximale $U_m = 10 \text{ V}$ que peut fournir le dispositif électronique. Le signal distordu s'écrit donc :

$$e(t) = \begin{cases} +U_m & \text{si } u(t) > 0 \\ -U_m & \text{si } u(t) < 0 \end{cases}$$

5) Tracer $e(t)$. Quel est le nom mathématique de cette fonction ? Préciser ces caractéristiques physiques.

6) L'effet Larsen est-il un phénomène physique linéaire ? Justifier.

On donne ci-dessous la décomposition en série de Fourier du signal $e(t)$.

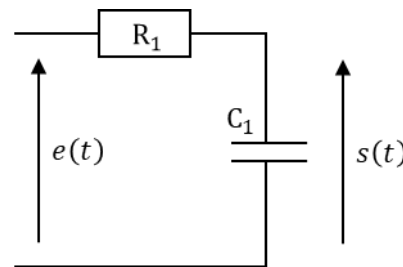
$$e(t) = \sum_n \frac{4U_m}{n\pi} \sin(n\omega_1 t) \quad \text{avec : } n \in \{\text{entiers impairs}\}$$

On définit le taux de distorsion harmonique de rang n d'un signal, noté τ_n , le rapport entre l'amplitude de l'harmonique de rang n et l'amplitude du fondamental de ce signal, exprimé en pourcentage.

$$\tau_n = 100 \times \frac{U_n}{U_1} \quad \text{avec } U_n \text{ l'amplitude de l'harmonique de rang } n$$

7) Déterminer l'expression de τ_n pour le signal $e(t)$. Application numérique : compléter dans le tableau fourni en annexe les valeurs de τ_n pour le signal $e(t)$, pour $n = 1, 3$ et 5 .

On filtre le signal $e(t)$ à l'aide du filtre ci-contre. On note $s(t)$ le signal de sortie. Données : $R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 0,20 \text{ }\mu\text{F}$



8) Déterminer sans calcul la nature du filtre.

9) Déterminer l'expression de sa fonction de transfert $\underline{H}_1(\omega) = \frac{s(t)}{e(t)}$

10) Déterminer la pulsation de coupure, notée ω_c . Calculer sa valeur.

11) Tracer son diagramme de Bode en amplitude (gain en dB en fonction du logarithme de ω) sur le graphique en annexe. On veillera à préciser les équations des asymptotes.

12) On pose : $x = \omega_1/\omega_c$. Montrer que τ_n pour le signal $s(t)$ a pour expression :

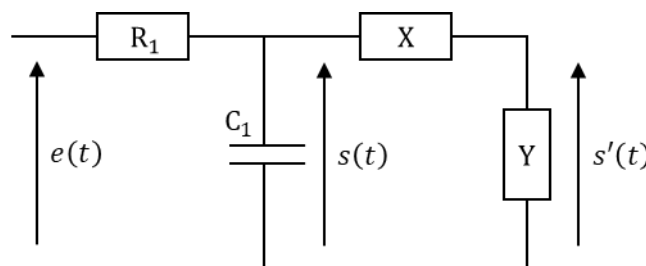
$$\tau_n(s(t)) = \frac{100}{n} \cdot \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + (nx)^2}}$$

13) Application numérique : compléter dans le tableau fourni en annexe les valeurs de τ_n pour le signal $s(t)$, pour $x = 1$ et $x = 0,5$; et pour $n = 1, 3$ et 5 .

14) Conclure : pour quelle pulsation ω_1 la correction de la distorsion est-elle la plus efficace ?

On souhaite à présent améliorer le filtre en rajoutant en sortie un autre filtre utilisant deux dipôles X et Y comme représenté sur la figure ci-contre. L'objectif est de construire un filtre passe-bas d'ordre 2.

15) Les dipôles X et Y représentent une résistance R_2 et une inductance L_2 . Déterminer qui de X ou Y correspond à la résistance et qui correspond à la bobine.



16) Déterminer l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 et la mettre sous la forme ci-dessous. On précisera les expressions de H_0 , ω_0 et Q en fonction des paramètres du circuit.

$$\underline{H}_2(\omega) = \frac{s'(t)}{e(t)} = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On admet que les valeurs $L_2 = 341 \text{ mH}$ et $R_2 = 707 \text{ }\Omega$ permettant d'avoir $\omega_0 = \omega_c$ (la pulsation de coupure du premier circuit) et $Q = 1/\sqrt{2}$. Ces valeurs impliquent alors que : $H_0 = 0,414$.

17) Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $\omega_0 = \omega_c$ et $Q = 1/\sqrt{2}$.

18) Application numérique : compléter dans le tableau fourni en annexe les valeurs de τ_n pour le signal $s'(t)$, pour $x = 1$ et $x = 0,5$; et pour $n = 1, 3$ et 5 . Conclure.

----- Fin de la partie II -----

III - Circuit à retard

On se place en régime sinusoïdal établi. On souhaite fabriquer un filtre qui doit retarder le signal d'entrée $e(t)$ d'une durée fixée, notée τ . Ainsi :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

19) Après avoir introduits les signaux complexes associés, déterminer la fonction de transfert $\underline{H}_r(\omega)$ du filtre souhaité.

Bien qu'il ne soit pas strictement possible de réaliser un tel filtre avec une combinaison des dipôles R, L, C , nous verrons qu'il est possible de concevoir des filtres à partir de ces dipôles qui ont un comportement asymptotique égal à celui du filtre recherché.

On donne le développement limité à l'ordre 2 pour $|x| \ll 1$ (avec $x \in \mathbb{C}$) des fonctions ci-dessous.

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2$$

On considère deux filtres, dont les fonctions de transfert sont données par :

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + j\omega RC} \qquad \underline{H}_2 = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} \quad \text{et on pose : } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

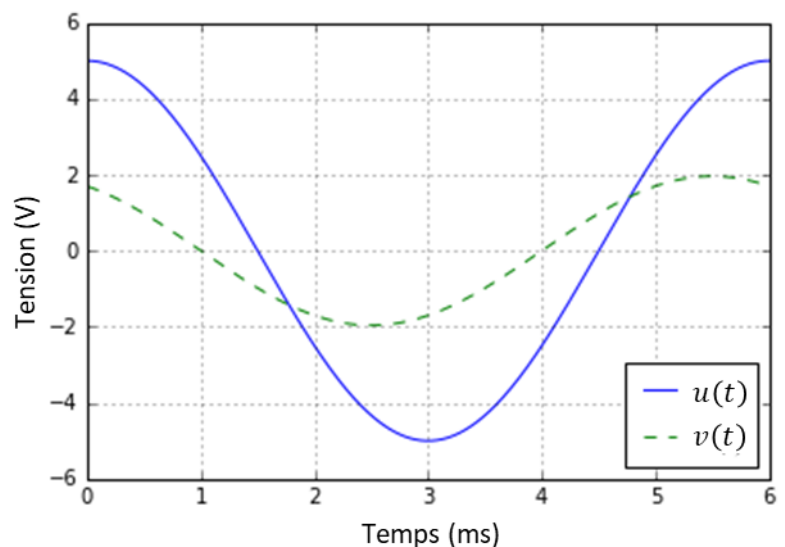
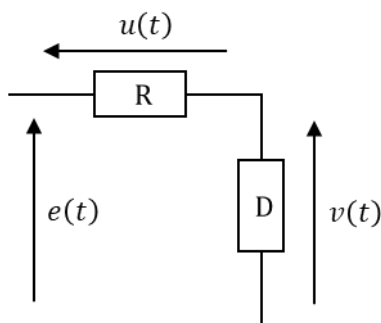
20) Établir les développements limités à l'ordre 1 en ω pour $\omega \rightarrow 0$ de \underline{H}_r et \underline{H}_1 . Donner l'expression du retard τ ainsi réalisé.

21) Établir les développements limités à l'ordre 2 en $\omega \rightarrow 0$ de \underline{H}_r et \underline{H}_2 . Donner l'expression du retard τ ainsi réalisé. Quelle est alors la valeur du facteur de qualité Q ?

----- Fin de la partie III -----

IV - Détermination d'un dipôle inconnu

Dans le montage ci-dessous, le GBF délivre une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω , R est une résistance et D un dipôle inconnu. On note $u(t)$ et $v(t)$ les tensions aux bornes respectivement de R et de D . On visualise à l'oscilloscope $u(t)$ et $v(t)$ et on obtient le graphe ci-contre.



On utilisera ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de D , sachant que $R = 100 \Omega$.

22) Déterminer graphiquement les expressions complètes de $u(t)$ et $v(t)$ (faire les applications numériques pour la valeur moyenne, l'amplitude, la pulsation et la phase à l'origine de chaque signal).

23) On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance complexe du dipôle D (avec $X, Y \in \mathbb{R}$). Déterminer les caractéristiques du dipôle. Proposer un modèle linéaire équivalent à ce dipôle (condensateur et/ou bobine et/ou résistor...).

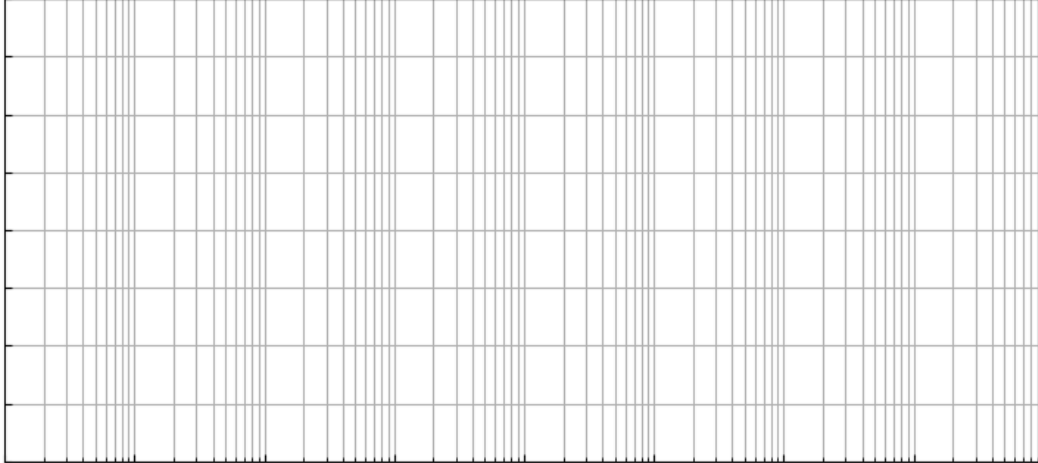
----- Fin de la partie IV -----

Annexe

Question n°7 : valeurs de τ_n pour le signal $e(t)$

$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$

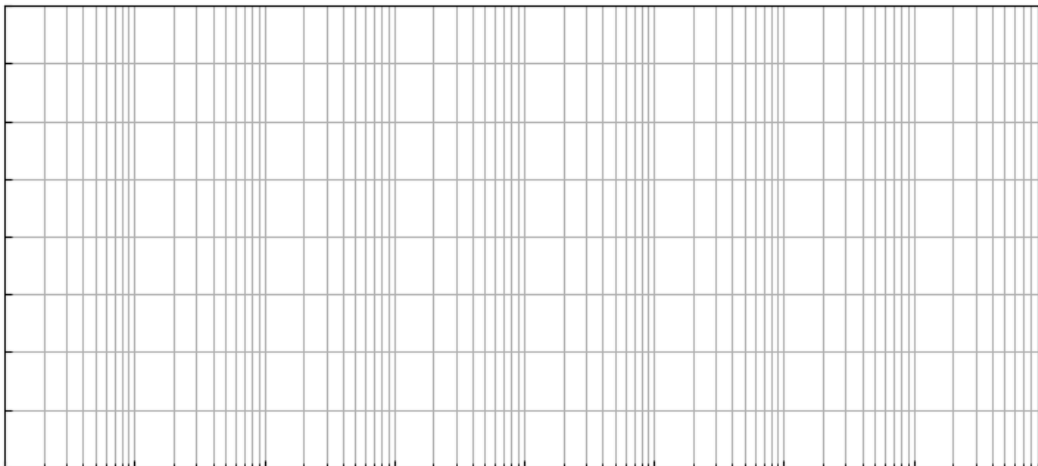
Question n°11 :



Question n°13 : valeurs de τ_n pour le signal $s(t)$

	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
$x = 1$			
$x = 0,5$			

Question n°17 :



Question n°18 : valeurs de τ_n pour le signal $s'(t)$

	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
$x = 1$			
$x = 0,5$			

I - Chimie de l'airbag

1) La constante d'équilibre $K_1 = 10^{23} \gg 1$. On peut donc supposer la réaction quantitative.

2) La réaction étant considérée comme quantitative :

$$n_{N_2} = \frac{3}{2} n_{NaN_3} = \frac{3}{2} \times \frac{m_{NaN_3}}{M_{Na} + 3 M_{N_3}} = 1,5 \text{ mol}$$

3) La pression dans le sac vaut :

$$P = \frac{n_{N_2} RT}{V} = 1,07 \text{ bar} > P_{atm} = 1 \text{ bar}$$

La pression étant supérieur à la pression extérieur, l'airbag se gonfle.

4) On a :

$$n'_{N_2} = \frac{1}{10} n_{Na} = \frac{1}{10} n_{NaN_3} = \frac{1}{10} \times \frac{m_{NaN_3}}{M_{Na} + 3 M_{N_3}} = 0,1 \text{ mol}$$

----- Fin de la partie I -----

II - Correction de la distorsion harmonique

5) Signal créneau de valeur moyenne nulle, d'amplitude U_m et de pulsation ω_1 .

6) Non car le signal de sortie n'est plus sinusoïdal. L'effet Larsen a donc créé des harmoniques.

7) On constate que :

$$E_n = \frac{E_1}{n} \Rightarrow \tau_n(e(t)) = \frac{100}{n}$$

Ainsi :

	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
$\tau_n(e(t))$	100 %	33 %	20 %
$\tau_n(s(t))$ avec : $x = 1$	100 %	15 %	5,5 %
$\tau_n(s(t))$ avec : $x = 0,5$	100 %	21 %	8,3 %
$\tau_n(s'(t))$ avec : $x = 1$	100 %	5,2 %	1,1 %
$\tau_n(s'(t))$ avec : $x = 0,5$	100 %	14 %	3,3 %

8) En BF : $\underline{s}(t) = \underline{e}(t)$ d'après la loi des mailles. En HF : $\underline{s}(t) = 0$ car tension aux bornes d'un fil. C'est donc un passe-bas.

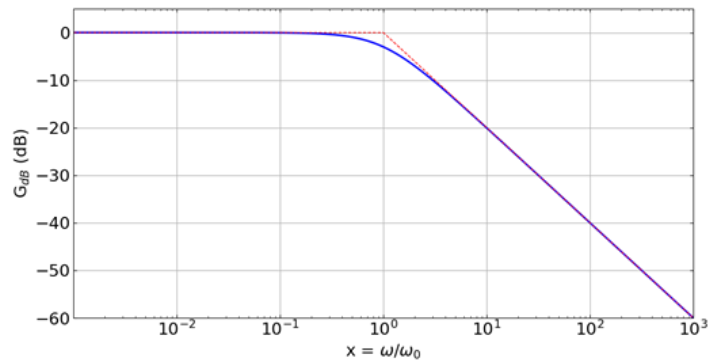
9) Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

10) On a :

$$\max(|\underline{H}_1|) = 1 \quad \text{et} \quad |\underline{H}_1(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c R_1 C_1)^2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{R_1 C_1} = 5,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

11) Bien repérer le $\omega_c = 5000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ sur le graphique.



12) On a :

On note S_n l'amplitude de l'harmonique de rang n pour la sortie et $E_n = E_1/n$ pour l'entrée. On rappelle que :

$$\left| \underline{H}_1(n\omega_1) \right| = \frac{S_n}{E_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (n\omega_1/\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (nx)^2}}$$

On a donc :

$$\tau_n(s(t)) = 100 \times \frac{S_n}{S_1} = 100 \times \frac{E_n}{\sqrt{1 + (nx)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + (x)^2}}{E_1} = \boxed{\frac{100}{n} \cdot \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + (nx)^2}}}$$

13) Cf tableau.

14) Le cas le plus favorable est $x = 1$, c'est-à-dire $\omega_1 = 5,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

15) Il faut prendre la sortie sur R_2 pour avoir un passe-bas d'ordre 2. En effet, en HF $\underline{s}(t) = 0$. En BF, avec un pont diviseur, $\underline{s}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \underline{e}(t)$.

16) Pont diviseur de tension entre $\underline{s}(t)$ et $\underline{s}'(t)$.

$$\frac{\underline{s}'(t)}{\underline{s}(t)} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2}$$

On note :

$$\underline{Z}_{eq} = \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} \right)^{-1}$$

Pont diviseur de tension entre $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$.

$$\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R_1 + \underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{1 + R_1 \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} \right)}$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{s}'(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{s}'(t)}{\underline{s}(t)} \cdot \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L_2 + j\omega R_1 R_2 C_1 + \omega^2 R_1 C_1 L_2 + R_1}$$

On divise par $R_1 + R_2$ puis on identifie les différents termes.

$$\underline{H}_2 = \frac{\overbrace{R_2 / (R_1 + R_2)}^{= H_0}}{1 - \omega^2 \underbrace{\frac{R_1 C_1 L_2}{R_1 + R_2}}_{= 1/\omega_0^2} + j\omega \underbrace{\frac{L_2 + R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2}}_{= 1/Q\omega_0}}$$

On a donc :

$$\boxed{H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 C_1 L_2}}} \quad \boxed{Q = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{R_1 + R_2}{L_2 + R_1 R_2 C_1}}$$

17) Le plateau BF doit se trouver en $G_{dB} = 20 \log(H_0) = -7,7$ dB. En $x = 1$, on a $G_{dB} = 20 \log(QH_0) = -10,7$ dB. Une pente de -40 dB/dec en HF. Pas de résonance.

18) De même qu'en question 12, on a :

$$\left| \underline{H}_2(n\omega_1) \right| = \frac{S_n}{E_n} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (nx)^2)^2 + \left(\frac{nx}{Q}\right)^2}}$$

On a donc :

$$\tau_n(s(t)) = 100 \times \frac{S_n}{S_1} = \frac{100}{n} \cdot \sqrt{\frac{(1 - (x)^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}{(1 - (nx)^2)^2 + \left(\frac{nx}{Q}\right)^2}}$$

Cf tableau. Le mieux est toujours le cas où $x = 1$. La correction est bien meilleure que pour le filtre d'ordre 1.

----- Fin de la partie II -----

III - Circuit à retard

19) Signaux réels :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{et} \quad s(t) = e(t - \tau) = E_m \cos(\omega t - \omega \tau + \phi)$$

On introduit les signaux complexes :

$$\underline{e}(t) = E_m e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{et} \quad \underline{s}(t) = E_m e^{j(\omega t - \omega \tau + \phi)}$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}_r(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = e^{-j\omega\tau}$$

20) On a, pour $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H}_r \simeq 1 - j\omega\tau$ et $\underline{H}_1 \simeq 1 - j\omega RC$

On réalise bien un filtre à retard, avec $\tau = RC$.

21) On a, pour $\omega \rightarrow 0$:

$$\underline{H}_r \simeq 1 - j\omega\tau + \frac{(-j\omega\tau)^2}{2} = \boxed{1 - j\omega\tau - \frac{\omega^2\tau^2}{2}}$$

De plus :

$$\underline{H}_2 \simeq 1 + (LC\omega^2 - j\omega RC) + (LC\omega^2 - j\omega RC)^2$$

On ne garde que les termes d'ordre 1 et 2.

$$\underline{H}_2 \simeq 1 + (LC\omega^2 - j\omega RC) + (-j\omega RC)^2 = \boxed{1 - j\omega RC + \omega^2(LC - R^2C^2)}$$

Ces expressions coïncideront pour :

$$\boxed{\tau = RC} \quad \text{et} \quad -\frac{\tau^2}{2} = LC - R^2C^2 \quad \Rightarrow \quad LC = \frac{R^2C^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

----- Fin de la partie III -----

IV - Détermination d'un dipôle inconnu

22) $u(t)$ est un cosinus sans déphasage de moyenne nulle et d'amplitude 5 V. La période vaut $T = 6,0 \text{ ms}$, la pulsation vaut donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$v(t)$ est un cosinus de même pulsation, déphasé de 0,5 ms, soit $\phi = 2\pi \cdot \frac{0,5}{6} = \frac{\pi}{6}$, de moyenne nulle et d'amplitude 2 V.

$$u(t) = 5 \cos(\omega t)$$

$$v(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

23) En RSF, on a :

$$\underline{u}(t) = R \underline{i}(t) \quad \text{et} \quad \underline{v}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{v}(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{X + jY}{R}$$

On en déduit le rapport des amplitudes et le déphasage :

$$\frac{2}{5} = \frac{|\underline{v}(t)|}{|\underline{u}(t)|} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{6} = \arg\left(\frac{\underline{v}(t)}{\underline{u}(t)}\right) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Du déphasage, il vient :

$$\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Que l'on injecte dans le gain :

$$\frac{2}{5} = \frac{\sqrt{(Y\sqrt{3})^2 + Y^2}}{R} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{R}{5} = 20 \Omega}$$

On ne conserve que la racine positive car X sera nécessairement positif et $\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) > 0$ donc $Y > 0$.

On en déduit :

$$\boxed{X = Y\sqrt{3} = 35 \Omega}$$

Le dipôle D est donc l'association en série d'une résistance $r = X = 35 \Omega$ et d'une inductance $L = \frac{Y}{\omega} = 20 \text{ mH}$.